



**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa locală**  
**Județul Alba, 13 februarie 2015**  
**Clasa a XII-a**

**Problema 1.**

Pe mulțimea  $G = (0,2)$  definim legea de compoziție:

$$x \circ y = \frac{xy}{xy - x - y + 2}, (\forall) x, y \in G.$$

- a) Să se arate că  $(G, \circ)$  este grup abelian.
- b) Să se arate că funcția  $f: (0,2) \rightarrow (0, \infty), f(x) = \frac{x}{2-x}$ , este un izomorfism de grupuri de la grupul  $(G, \circ)$  la grupul  $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ .
- c) Să se calculeze  $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ ori}}; x \in G, n \in \mathbb{N}^*$ .
- d) Să se determine părțile stabile finite ale lui  $G$  în raport cu operația „ $\circ$ ”.

**Problema 2.**

Fie  $(G, \cdot)$  un grup de ordinul 2014 și  $f, g$  două endomorfisme ale sale, cu proprietatea că  $g$  este injectivă și  $f(x) = g(x^3)$ , pentru orice  $x \in G$ .

- a) Arătați că  $(xy)^3 = x^3y^3, (\forall)x, y \in G$ .
- b) Arătați că  $G$  este ciclic.

**Problema 3.**

Fie  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  două funcții derivabile care au proprietatea că funcția  $f + 3g$  este o primitivă a funcției  $2f - g$ , iar funcția  $5f - 6g$  este o primitivă a funcției  $10f + 2g$ .

- a) Arătați că  $f'(x) - 2f(x) = 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$ .
- b) Determinați funcțiile  $f$  și  $g$ .

**Problema 4.**

Fie  $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$  și  $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tgx)^n dx, n \in \mathbb{N}^*$ .

- a) Arătați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$ , unde  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă oarecare.
- b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ .
- c) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{K_n}$ .

*Timp de lucru 3 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*